

Curvas y Superficies Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Curvas y Superficies Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Curvas y Superficies.

Curso Académico 2023/24.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1. Realice los siguientes apartados:

- Sea $\alpha :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable p.p.a. y tal que su traza está contenida en la esfera centrada en el origen de radio $r > 0$. Comprueba que la curvatura de α es siempre mayor o igual que $1/r$.
- Si $\beta :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable p.p.a. con curvatura no nula en todo instante, entonces $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \beta'(t)$ es una curva regular con curvatura mayor o igual que 1.

Ejercicio 2. Sea $S = \{X(u, v) : u \in]0, +\infty[, v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}$ donde

$$X(u, v) = (u \cos(v), u \operatorname{sen}(v), \ln(\cos(v)) + u)$$

Se pide:

- Demuestra que X es una parametrización global de S y que S es una superficie orientable.
- Calcula la primera y segunda formas fundamentales de S . Prueba que el punto $p = (1, 0, 1) \in S$ y determina el plano tangente de la superficie en ese punto.
- Calcula la curvatura de Gauss y la curvatura media de S y clasifica los puntos de S en elípticos, hiperbólicos, llanos (parabólicos y planos).
- Prueba que S es una superficie reglada. Razonar si S es localmente isométrica o no a un plano.
- Sea $\pi : S \rightarrow \{z = 0\}$ la aplicación dada por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Prueba que π es un difeomorfismo sobre su imagen.

Ejercicio 3. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- Si S_1, S_2 son superficies regulares orientables con aplicaciones de Gauss $N_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $N_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo local tal que $N_2 \circ f = N_1$, entonces $p \in S_1$ es elíptico (hiperbólico, llano) si y sólo si $f(p) \in S_2$ es elíptico (hiperbólico, llano).
- Si S_1, S_2 son dos esferas con igual radio $r > 0$, S es una superficie regular orientable no contenida en la bola con borde S_j para $j = 1, 2$ y $S_1 \cap S = S_2 \cap S = S_1 \cap S_2 = \{p\}$ para un punto $p \in \mathbb{R}^3$, entonces las curvaturas principales $k_1(p), k_2(p)$ de S en p satisfacen $-1/r \leq k_1(p) \leq k_2(p) \leq 1/r$.
- Si S_1, S_2 son superficies regulares orientables, $N_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $N_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ sus aplicaciones de Gauss y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local, entonces $N_2 \circ f = N_1$.
- Existe una parametrización $X : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $E = G = 3$ y $F = 0$.